**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ**

**[Ενότητες Ορισμός της Συνέχειας – Πράξεις με Συνεχείς Συναρτήσεις – Συνέχεια Συνάρτησης σε Διαστήματα πλην των Βασικών Θεωρημάτων του κεφ.1.8 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

***ΘΕΜΑ Β***

**Παράδειγμα 1.**

Να εξετάσετε ποιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο σημείο $x_0$:

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & \text{αν } x\le 2 \\ x^3 & \phantom{αν } x>2 \end{cases},\ x_0=2$

2. $f(x)=\begin{cases} ημx\cdot συν\dfrac{1}{x} & \text{αν } x\ne 0 \\ 0 & \phantom{αν } x=0 \end{cases},\ x_0=0$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & \text{αν } x\in[0,1) \\ \ln(-x) & \phantom{αν } x<0 \end{cases},\ x_0=2$

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{|x|} & x>0 \\ 2 & \text{αν } x=0 \\ -x+2 & x<0 \end{cases},\ x_0=0$

<u>Λύση</u>

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι προφανώς το $\mathbb{R}$. Για να δούμε αν είναι συνεχής στο 2 θα πρέπει τα πλευρικά όρια της $f$ να είναι ίσα με την $f(2)$.

   Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+4\right)=8$,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^3) = 8$ και $f(2) = 8$.

Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

2. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε τώρα αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Έχουμε $f(0) = 0$. Για να υπολογίσουμε όμως το παραπάνω όριο εργαζόμαστε ως εξής:

$\left|\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right| = |\eta\mu x|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right| \le |\eta\mu x|$, επειδή $\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right| \le 1$.

Οπότε $-|\eta\mu x| \le \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \le |\eta\mu x|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-|\eta\mu x|) = \lim\limits_{x\to 0}(|\eta\mu x|) = 0$, εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής

έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ δηλαδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0.

3. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = (-\infty, 1)$ δηλαδή το $x_0 = 2$ δεν ανήκει στο $A$, επομένως δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν η f είναι ή δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x-2)}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-2) = -2$ διότι $|x| = x$ αφού $x > 0$. Άρα το ένα πλευρικό όριο είναι διαφορετικό από το $f(0) = 2$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0.

<u>Μεθοδολογία</u>

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.
- Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο $x_0$.
- Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια στο σημείο $x_0$ και ελέγχουμε αν είναι ίσα με την $f(x_0)$.
- Το αποτέλεσμα του ελέγχου μας καθορίζει αν η συνάρτηση μας είναι ή δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0$.

**Παράδειγμα 2.**

Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)-1 & \text{αν } x\geq 0\\ x^{-1}\cdot\eta\mu x & \phantom{\text{αν }} x<0\end{cases}$$

<u>Λύση</u>

- Στο διάστημα $\left(0,+\infty\right)$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, αφού η $\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ και η -1 είναι συνεχής ως σταθερή.

- Στο διάστημα $\left(-\infty,0\right)$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $x$.

Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο η συνάρτηση δηλαδή στο $x_0=0$.

Παρατηρούμε ότι $f\left(0\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^{-1}\cdot\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

Άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$. Οπότε η δοθείσα συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν η συνάρτηση $f$ έχει τύπο : $f(x)=\begin{cases}f_1(x)\,, x\leq x_0\\ f_2(x)\,, x>x_0\end{cases}$ και ζητείται να εξετάσουμε την $f$

ως προς τη συνέχεια εργαζόμαστε ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα :

- Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $(-\infty,x_0)$, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια βασικών συναρτήσεων και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $(x_0,+\infty)$, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια βασικών συναρτήσεων και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x_0$ , χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας.

**Παράδειγμα 3.**

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ αν η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 3-(x+2)^2 & x\le -1 \\ \kappa x+\lambda & \text{αν } -1<x<1 \\ x\ln x & x\ge 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση είναι συνεχής , άρα τα πλευρικά όρια στα σημεία που αλλάζει μορφή η συνάρτηση θα πρέπει να είναι ίσα με την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης στα σημεία αυτά.

Ισχύει: $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

Δηλαδή: $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[3-(x+2)^2\right]=\lim\limits_{x\to -1^+}(\kappa x+\lambda)\Leftrightarrow 2=-\kappa+\lambda$ (1).

Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

Δηλαδή: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\kappa x+\lambda)=\lim\limits_{x\to 1^+} x\ln x\Leftrightarrow \kappa+\lambda=0$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε ότι $\lambda=1$ και $\kappa=-1$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης. Θα πρέπει να είναι ίσα με την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης στα σημεία αυτά. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τις παραμέτρους τις οποίες αναζητούμε. Το επιλύουμε και βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων.

**Παράδειγμα 4.**

Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f:[-5,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xf(x)=\sqrt{x+5}-f(x)-2$ (1) για κάθε $x\in D_f=[-5,+\infty)$.

<u>Λύση</u>

Από την (1) για κάθε $x\in[-5,-1)\cup(-1,+\infty)$, έχουμε $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$. Εφ' όσον η $f$ είναι συνεχής στο $[-5,+\infty)$, θα είναι και συνεχής στο $x_0=-1$, δηλαδή θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$ (2).

Για $x\in[-5,-1)\cup(-1,+\infty)$, έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}=\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+5}+2}=\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+5}+2},$$

συνεπώς $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{\sqrt{x+5}+2}=\dfrac{1}{4}$,

οπότε λόγω της (2), παίρνουμε ότι: $f(-1)=\dfrac{1}{4}$.

Άρα ο τύπος της συνάρτησης $f$ είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}, & x\in[-5,-1)\cup(-1,+\infty)\\[2mm] \dfrac{1}{4}, & x=-1\end{cases}$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι μία συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0\in A$ όταν ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Αν μας ζητούν την τιμή $f(x_0)$ τότε αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

**Παράδειγμα 5.**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία πληροί τη παρακάτω σχέση:

$\sigma\upsilon\nu x-1\le x^3-xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε την $f(0)$.

<u>Λύση</u>

Από τη δοσμένη ανισοτική σχέση λαμβάνουμε:

$\sigma\upsilon\nu x-1\le x^3-xf(x)\Leftrightarrow xf(x)\le x^3-\sigma\upsilon\nu x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε:

- Για $x>0$ έχουμε $f(x)\le\dfrac{x^3+1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=x^2+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$ και

  $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\le\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0$ και

- για $x<0$ έχουμε $f(x)\ge\dfrac{x^3+1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=x^2+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$ και

  $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\ge\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ και επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $f(0)=0$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι μία συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0\in A$ όταν ισχύει:
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0\in A$ και σαν δεδομένο έχουμε μία ανισοτική σχέση, τότε υπολογίζουμε το $f(x_0)$ κάνοντας χρήση των πλευρικών ορίων και καταλήγουμε σε σχέσεις της μορφής $f(x_0)\ge\kappa$ και $f(x_0)\le\kappa$ οπότε $f(x_0)=\kappa$ με $\kappa\in\mathbb{R}$.

**Παράδειγμα 6.**

Έστω ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$. Να υπολογίσετε το $f(1)$ αν γνωρίζουμε ότι ισχύει: $x-x^4\le(x-1)f(x)\le-3x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Για $x=1$ λαμβάνουμε:

$0\le 0\cdot f(1)\le 0$ και επειδή λόγω συνέχειας το $f(1)\ne\pm\infty$ έχουμε ότι ισχύει η σχέση
( ισχύει το = )

Αφού με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να βρούμε το $f(1)$, θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο παρεμβολής.

Καταρχήν παραγοντοποιούμε το πρώτο και το τρίτο μέλος της ανισότητας και έχουμε:

$x(1-x)(x^2+x+1)\le(x-1)f(x)\le-3(x-1)$ έπειτα για $x\ne1$ διαιρούμε με το $x-1$ οπότε

- Αν $x>1$ έχουμε: $-x\left(x^2+x+1\right)\le f(x)\le-3$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}[-x\left(x^2+x+1\right)]=\lim\limits_{x\to1^+}(-3)=-3$,

  οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-3$.

- Αν $x<1$ έχουμε: $-x\left(x^2+x+1\right)\ge f(x)\ge-3$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}[-x\left(x^2+x+1\right)]=\lim\limits_{x\to1^-}(-3)=-3$,

  οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-3$.

Άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=-3$ διότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

<u>Μεθοδολογία</u>

- "Εγκλωβίζουμε" την δοσμένη συνάρτηση ανάμεσα σε 2 άλλες που έχουν ίδιο όριο και κάνουμε χρήση του κριτηρίου παρεμβολής.

- Υπολογίζουμε το όριο αυτής.

**Παράδειγμα 7.**

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-5f(x)-16}{\sqrt{x}-3}=5$ να βρείτε την τιμή της $f$ στο 9.

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{x^2-5f(x)-16}{\sqrt{x}-3}$, $x\neq 9$ οπότε $\lim\limits_{x\to 9}g(x)=5$.

Έχουμε

$$g(x)=\frac{x^2-5f(x)-16}{\sqrt{x}-3}\Leftrightarrow g(x)\left(\sqrt{x}-3\right)=x^2-5f(x)-16\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{5}\left(x^2-16-g(x)\left(\sqrt{x}-3\right)\right)$$

Παίρνοντας τα όρια στην τελευταία σχέση λαμβάνουμε:

$$\lim_{x\to 9}f(x)=\frac{1}{5}\left(81-16-5\cdot 0\right)=13.$$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 9}f(x)=13$ και επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $f(9)=13$.

<u>Μεθοδολογία</u>

- Ως βοηθητική συνάρτηση θέτουμε τη συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε το όριο. Η σχέση αυτή περιέχει την $f(x)$, της οποίας ζητάμε το όριο.

- Λύνουμε ως προς $f(x)$ και παίρνουμε τα όρια.

**Παράδειγμα 8.**

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

α. $f(x)=3\eta\mu^3(x+1)+x^2+2$ β. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{2x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

<u>Λύση</u>

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το $D_f=\mathbb{R}$.
Θεωρούμε τις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις:

$f_1(x)=3x^3$,

$f_2(x)=\eta\mu x$,

$f_3(x)=x+1$ και $f_4(x)=x^2+2$.

Τότε η συνάρτηση $(f_1\circ(f_2\circ f_3))(x)=3\eta\mu^3(x+1)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή $f(x)=(f_1\circ(f_2\circ f_3))(x)+f_4(x)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

β. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g$ είναι το $D_g=\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής για κάθε $x\neq 0$ ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $g_1(x)=\eta\mu(\eta\mu x)$ και $g_2(x)=2x$. Η συνάρτηση $g_1(x)=\eta\mu(\eta\mu x)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=\eta\mu u$ και $u=\eta\mu x$.

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια στο $x_0=0$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{2x}\right]$ (1)
  - Για το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}$ θέτουμε $u=\eta\mu x$. Τότε: $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$, Δηλαδή όταν

    $x\to 0$, τότε $u\to 0$ οπότε:

    $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

- Επίσης: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

Τότε από τη σχέση (1) έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

- Είναι: $g(0)=1$.

  Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\neq g(0)$, η συνάρτηση $g$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

<u>Μεθοδολογία</u>

α. Στη περίπτωση που η συνάρτηση $f$ δεν είναι πολλαπλού τύπου, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού $D_f$ και ελέγχουμε αν η συνάρτηση προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων για κάθε $x\in D_f$.

β. Στη περίπτωση που υπάρχει $x_0$ εκατέρωθεν του οποίου αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης $f$, εργαζόμαστε ως εξής:

- Σε κάθε διάστημα με ανοικτό άκρο το $x_0$ ελέγχουμε αν η συνάρτηση προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

- Ερευνούμε τη συνέχεια στο $x_0$ με τη βοήθεια του ορισμού.

  Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$.

  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ η f είναι συνεχής στο $x_0$.

  - Αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ τότε η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0$.

**Παράδειγμα 9.**

Να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+\kappa-\lambda}{x-2}, & x<2 \\ x^2-(\kappa+\lambda)x, & x\geq 2 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το $D_f=\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(-\infty,2)$ ως ρητή και στο $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=2$.

Δηλαδή θα πρέπει: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ (1)

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+\kappa-\lambda}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\left(x^2+\kappa-\lambda\right)\cdot\dfrac{1}{x-2}\right]$ (2).

  Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+\kappa-\lambda\right)=4+\kappa-\lambda$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ και $x<2 \Leftrightarrow x-2<0.$

  - Αν $4+\kappa-\lambda<0,$ τότε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty.$
  - Αν $4+\kappa-\lambda>0,$ τότε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty.$

  Άρα δεν υπάρχει το όριο της $f$ στο $x_0=2^-$.

  Επομένως για να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, πρέπει:

  $4+\kappa-\lambda=0 \Leftrightarrow \kappa-\lambda=-4$ (3)

  Τότε: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4$.

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[x^2-(\kappa+\lambda)x\right]=4-2(\kappa+\lambda)$.

- $f(2)=2^2-(\kappa+\lambda)\cdot 2=4-2(\kappa+\lambda)$.

Από την (1) έχουμε: $4 = 4 - 2(\kappa + \lambda) \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 0$ (4)

Από το σύστημα των σχέσεων (3) και (4) βρίσκουμε: $\kappa = -2$ και $\lambda = 2$. Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{2\}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και συνεχής στο 2 για $\kappa = -2$ και $\lambda = 2$, συμπεραίνουμε ότι η $f$ είναι συνεχής για $\kappa = -2$ και $\lambda = 2$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0$ εκατέρωθεν του οποίου αλλάζει ο τύπος της, τότε τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει:
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

## *ΘΕΜΑ Γ*

**Παράδειγμα 1.**

Δίδεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (1) για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
2. Αν η $f$ είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

- Αφού η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$, θα ισχύει και για $x=y=0$, οπότε $f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.
- Για να αποδείξουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$. Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο 0 θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.

  Κάνουμε τον μετασχηματισμό $x=x_0+t$ οπότε αν $x\to x_0$ τότε $t\to 0$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{t\to 0} f(x_0+t)=\lim\limits_{t\to 0}\left[f(x_0)+f(t)\right]=f(x_0)+\lim\limits_{t\to 0} f(t)=f(x_0)$ που είναι και το ζητούμενο.

<u>Μεθοδολογία</u>

Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε τυχαίο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ κάνοντας χρήση των παρακάτω σχέσεων:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ή
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$ ή
- $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ ή $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+\kappa\cdot h)=f(x_0),\ \kappa\neq 0$ ή
- $\lim\limits_{h\to 1} f(x_0\cdot h)=f(x_0),\ x_0\neq 0$.

**Παράδειγμα 2.**

Έστω συνάρτηση $f$ συνεχής στο $x_0 = 0$ και τέτοια ώστε:

$\left|\dfrac{x \cdot f(x)}{2+\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu\left(x+x^2\right)\right| \le x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

<u>Λύση</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left|\frac{x \cdot f(x)}{2+\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu\left(x+x^2\right)\right| \le x^4 \Leftrightarrow -x^4 \le \frac{x \cdot f(x)}{2+\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu\left(x+x^2\right) \le x^4 \Leftrightarrow$$

$$-x^4 + \eta\mu\left(x+x^2\right) \le \frac{x \cdot f(x)}{2+\sigma\upsilon\nu x} \le x^4 + \eta\mu\left(x+x^2\right).$$

Επειδή $2+\sigma\upsilon\nu x > 0$ αφού $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την παραπάνω σχέση έχουμε:
$(2+\sigma\upsilon\nu x)\left[-x^4+\eta\mu\left(x+x^2\right)\right] \le x \cdot f(x) \le (2+\sigma\upsilon\nu x)\left[x^4+\eta\mu\left(x+x^2\right)\right]$ (1)

- Για κάθε $x > 0$ από την (1) έχουμε:

  $$(2+\sigma\upsilon\nu x)\left[-x^3+\frac{\eta\mu\left(x+x^2\right)}{x}\right] \le f(x) \le (2+\sigma\upsilon\nu x)\left[x^3+\frac{\eta\mu\left(x+x^2\right)}{x}\right]$$

  Όμως: $\lim\limits_{x\to 0^+}(2+\sigma\upsilon\nu x)\left[-x^3+\dfrac{\eta\mu\left(x+x^2\right)}{x}\right] =$

  $$\lim_{x\to 0^+}\left[(2+\sigma\upsilon\nu x)\left(-x^3+\frac{\eta\mu\left(x+x^2\right)}{x+x^2}\cdot\frac{x+x^2}{x}\right)\right] =$$

  $$\lim_{x\to 0^+}\left[(2+\sigma\upsilon\nu x)\left(-x^3+\frac{\eta\mu\left(x+x^2\right)}{x+x^2}\cdot(1+x)\right)\right] =$$

  $(2+1)(0+1\cdot 1) = 3$.

  (Για το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu\left(x+x^2\right)}{x+x^2}$ θέτουμε $x+x^2 = u$. τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+x^2\right) = 0$, δηλαδή όταν $x \to 0^+$ τότε $u \to 0^+$, αφού για κάθε $x > 0$ είναι $u > 0$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ημ\left(x+x^2\right)}{x+x^2}=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{ημu}{u}=1)$

Επίσης: $\lim\limits_{x\to 0^+}(2+συνx)\left[x^3+\dfrac{ημ\left(x+x^2\right)}{x}\right]=$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(2+συνx)\left(x^3+\frac{ημ\left(x+x^2\right)}{x+x^2}\cdot\frac{x+x^2}{x}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(2+συνx)\left(x^3+\frac{ημ\left(x+x^2\right)}{x+x^2}\cdot(1+x)\right)\right]=$$

$(2+1)(0+1\cdot 1)=3$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=3$.

- Για κάθε $x<0$ από την (1) έχουμε:

$$(2+συνx)\left[-x^3+\frac{ημ\left(x+x^2\right)}{x}\right]\geq f(x)\geq(2+συνx)\left[x^3+\frac{ημ\left(x+x^2\right)}{x}\right]$$

Εργαζόμενοι ως ανωτέρω έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=3$.

Επομένως, αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=3$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$ και επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, συμπεραίνουμε ότι $f(0)=3$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, τότε ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Επομένως, για να βρούμε την αριθμητική τιμή $f(x_0)$ αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

**Παράδειγμα 3.**

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1=0$ και τέτοια ώστε:
$f(x-3y)=f(x)\cdot f(3y)$ (*) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α. Για $x=y=0$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)\cdot[1-f(0)]=0$.

Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι: $1-f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=1$.

β. Αφού η $f$ είναι συνεχής $x_1=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$. (1)

Για να είναι η $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Θέτουμε $x=x_0-3h$. Όταν $x\to x_0$ έχουμε $h\to 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{x=x_0-3h}{=}\lim_{h\to 0}f(x_0-3h)\overset{(*)}{=}\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot f(3h)\right]=f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}f(3h). \quad (2)$$

Για το $\lim\limits_{h\to o}f(3h)$ θέτουμε $3h=u$. Όταν $h\to 0$ έχουμε και $u\to 0$, οπότε:

$$\lim_{h\to 0}f(3h)=\lim_{u\to 0}f(u)\overset{(1)}{=}1.$$

Τότε από την (2) βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Αν έχουμε μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $f(x\pm\lambda y)=\cdots$, για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ θέτουμε $x=x_0\pm\lambda h$ και έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0\pm\lambda h)=\cdots$, ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συναρτησιακή σχέση.

**Παράδειγμα 4.**

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1=\alpha$ και τέτοια ώστε: $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)+2$ (*) για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$.

α. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο 1.

γ. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

<u>Λύση</u>

α. Για $x=y=1$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε: $f(1)=f(1)+f(1)+2\Leftrightarrow f(1)=-2$. (1)

β. Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο α, έχουμε: $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ (2). Θέτουμε $x=\alpha\cdot h$. Όταν $x\to\alpha$ έχουμε $h\to1$, οπότε έχουμε:

$$f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}f(x)\overset{x=\alpha h}{=}\lim_{h\to1}f(\alpha\cdot h)\overset{(*)}{=}\lim_{h\to1}\left[f(\alpha)+f(h)+2\right]=f(\alpha)+\lim_{h\to1}f(h)+2$$

Άρα $f(\alpha)=f(\alpha)+\lim\limits_{h\to1}f(h)+2$. Οπότε $\lim\limits_{h\to1}f(h)=-2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{h\to1}f(h)=f(1)$ (3)

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$, δηλαδή ότι η $f$ είναι συνεχής στο 1.

γ. Έστω τυχαίο $x_0\in(0,+\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Θέτουμε $x=x_0\cdot h$. Όταν $x\to x_0$ έχουμε $h\to1$ οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{x=x_0h}{=}\lim_{h\to1}f(x_0\cdot h)\overset{(*)}{=}\lim_{h\to1}\left[f(x_0)+f(h)+2\right]=$$

$$f(x_0)+\lim_{h\to1}f(h)+2\overset{(3)}{=}f(x_0)+f(1)+2\overset{(1)}{=}f(x_0).$$

Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Μεθοδολογία

Αν έχουμε μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $f(x \cdot y) = \cdots$, για να βρούμε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ θέτουμε $x = x_0 \cdot h$ και έχουμε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 1} f(x_0 \cdot h) = \cdots$, ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συναρτησιακή σχέση.

**Παράδειγμα 5.**

Έστω συνάρτηση $f$ συνεχής στο $x_0 = 1$ και τέτοια ώστε: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-f(1)} = 2$.

α. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

<u>Λύση</u>

α. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)-2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-f(1)}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1} g\left(x\right) = 2$ και $f(x) = 2\sqrt{x} + \left[\sqrt{x+3}-f(1)\right]g(x)$.

Παίρνοντας όρια έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(2\sqrt{x} + \left[\sqrt{x+3}-f(1)\right]g\left(x\right)\right) = 2 + \left(2-f(1)\right)\cdot 2 = 6-2f(1)$. (1)

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right) = f(1)$.

Επομένως από την (1) έχουμε: $f(1) = 6-2f(1) \Leftrightarrow 3f(1) = 6 \Leftrightarrow f(1) = 2$.

β. Αφού $f(1) = 2$, έχουμε: $f(x) = 2\sqrt{x} + \left(\sqrt{x+3}-2\right)g(x)$. (2)

Άρα: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x} + \left(\sqrt{x+3}-2\right)g(x)-2}{x-1} =$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1} + \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot g\left(x\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to 1}\left[2\cdot\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} + \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\cdot g\left(x\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to 1}\left[2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\cdot g\left(x\right)\right] = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Μεθοδολογία

Ως βοηθητική συνάρτηση θέτουμε τη συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε το όριο.
Η σχέση αυτή περιέχει την $f(x)$ και λύνουμε ως προς $f(x)$. Κατόπιν βρίσκουμε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ με βάση τις ιδιότητες των ορίων.

*Ημερομηνία τροποποίησης: 25/8/2011*